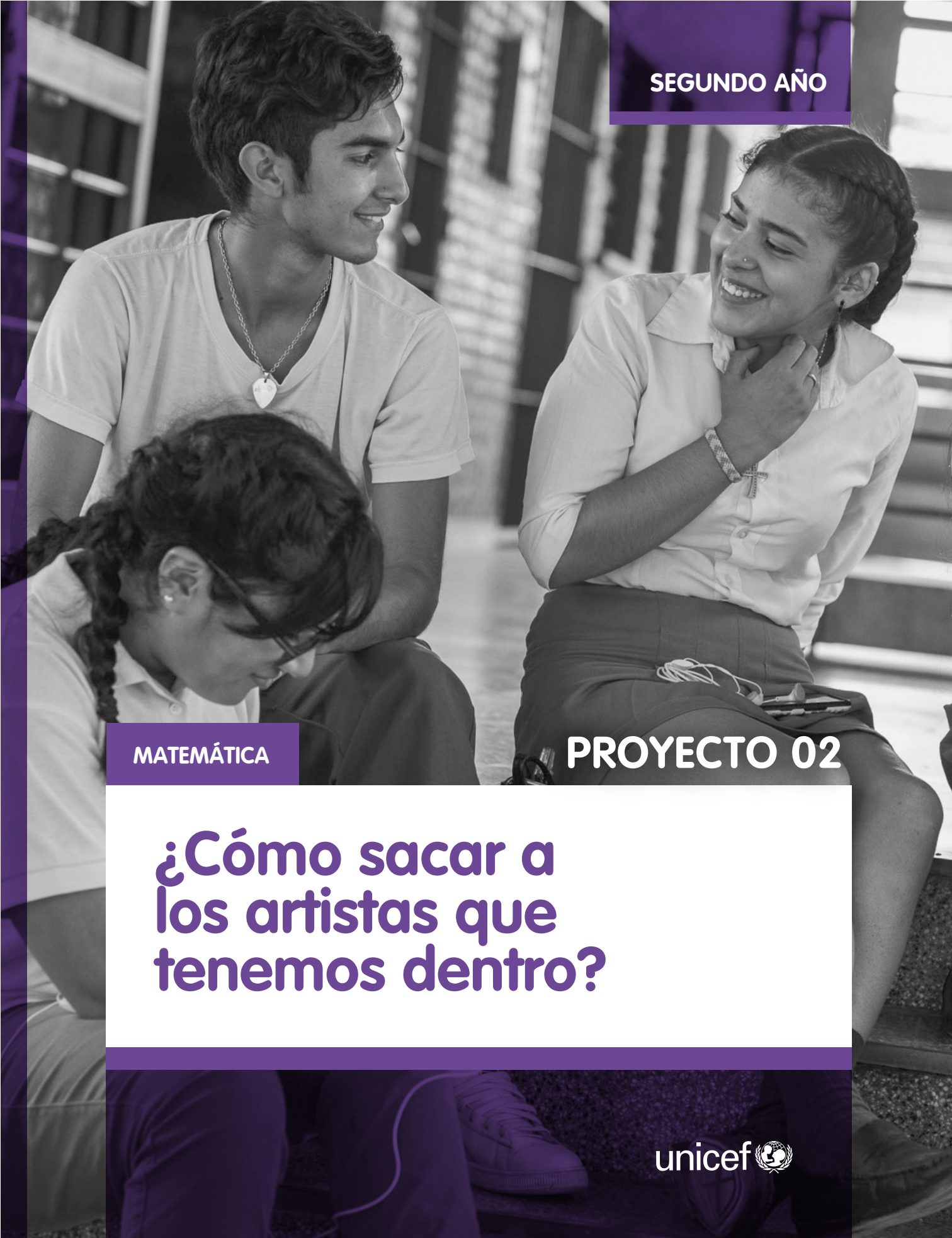




SEGUNDO AÑO

MATEMÁTICA

PROYECTO 02

¿Cómo sacar a los artistas que tenemos dentro?

CRÉDITOS EDITORIALES

Dirección Editorial:

Cora Steinberg, Especialista en Educación de UNICEF Argentina

Coordinación General:

Cecilia Litichever, Oficial de Educación de UNICEF Argentina

Coordinación de la serie Proyectos:

Melina Furman, Consultora de Educación de UNICEF Argentina

Autores: Laura Pezzatti

Profesores colaboradores: Fabiana Jerez, Ariel Mayorga, Horacio Santiago Pino, Lucía González, Luis Gramajo

Asesoría Técnica: Rebeca Anijovich

EDICIÓN Y CORRECCIÓN

Edición: Laura Efrón y Sol Peralta

Diseño y diagramación: Gomo | Leonardo García y Fernanda Rodríguez

Fotografía: Unicef | Ató Aracama.

Las imágenes de tapa e interiores corresponden a adolescentes de escuelas públicas de la provincia de Tucumán. Segunda Edición. Actualizada a partir de los aportes de docentes y autoridades de las escuelas PLANEA 2018.

ISBN: 978-92-806-5124-9

Para citar este documento:

UNICEF, PLANEA: Proyecto 2, 2do año – Primer ciclo nivel secundario, Buenos Aires, julio 2020.

El uso de un lenguaje no sexista ni discriminatorio es una de las preocupaciones de quienes concibieron este material. Sin embargo, y con el fin de evitar la sobrecarga gráfica que supondría utilizar en castellano o/a para marcar la existencia de ambos sexos, hemos optado por usar el masculino genérico clásico, en el entendido de que todas las menciones en tal género representan siempre a varones y mujeres. Se autoriza la reproducción total o parcial de los textos aquí publicados, siempre y cuando no sean alterados, se asignen los créditos correspondientes y no sean utilizados con fines comerciales.

© Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia (UNICEF)

www.unicef.org.ar

¿Cómo sacar a los artistas que tenemos dentro?



Índice

Presentación	6
Introducción al proyecto	8
Secuencia semanal de trabajo	13
• Semana 1. ¿Qué tan difícil es que otro dibuje por nosotros?	14
• Semana 2. ¿Cómo hacer una copia perfecta?	24
• Semana 3. ¿Cómo hacer una obra de arte con restricciones?	31
• Semana 4. ¿Cómo crear bellas obras matemáticas?	36
• Semana 5. ¿Cómo unir arte y matemática?	44
• Semana 6. ¿Cómo sacar a los artistas que tenemos dentro?	50
• Rúbrica final	54
Bibliografía	55

Presentación

Este cuadernillo forma parte de una serie de materiales pedagógicos que acompañan el Programa PLANEA Nueva Escuela para Adolescentes, desarrollado por UNICEF Argentina.

PLANEA tiene como objetivo continuar fortaleciendo la escuela secundaria, promoviendo mejores condiciones para enseñar, aprender y estar en la escuela con el fin de generar más y mejores oportunidades de aprendizaje para todos los chicos y chicas.

En este cuadernillo encontrarán un proyecto para la enseñanza destinado a los profesores y estudiantes de segundo año del nivel secundario. Se trata de un proyecto que propone abordar contenidos centrales de las distintas áreas del currículo a partir de la resolución de un “desafío central” que se va desarrollando a lo largo de las seis semanas de trabajo, a través de una serie de actividades que buscan vincular el conocimiento y los procesos de aprendizaje con el mundo real.

En cada semana se plantea una pregunta guía, anclada en las grandes ideas y modos de conocer de cada campo del conocimiento, que se aborda a través del trabajo con textos, problemas, casos, debates y otras estrategias didácticas activas que posicionan a los adolescentes en un rol protagónico y promueven el desarrollo de capacidades de planificación, resolución de problemas, colaboración y comunicación.

Los materiales ofrecen también diversas oportunidades para la evaluación formativa, de modo de acompañar a los alumnos en sus aprendizajes, y se proponen estrategias de enseñanza que consideran la diversidad inherente a cualquier grupo de estudiantes de modo de garantizar que todos y todas puedan aprender.

El proyecto culmina en una producción final en la que los alumnos dan cuenta de los aprendizajes logrados en su recorrido.

Este material es fruto de un trabajo colaborativo entre docentes y especialistas curriculares. Participaron en la elaboración del presente documento profesores



colaboradores de las escuelas secundarias que forman parte de PLaNEA y especialistas curriculares del Ministerio de Educación de la provincia de Tucumán y de UNICEF. A través de un proceso que incluyó encuentros presenciales e intercambios a distancia, se definieron los contenidos a abordar, se diseñó el desafío inicial del proyecto, se elaboraron las preguntas guía de cada semana y se planificaron las actividades e instancias de evaluación, tomando en cuenta las experiencias y los saberes diversos del grupo.

Esperamos que los profesores encuentren en este material un recurso valioso para enriquecer su práctica docente. Y deseamos, también, que puedan hacerlo propio, sumándole ideas, recursos y nuevas estrategias y adaptándolo para sus distintos grupos de alumnos, con el propósito de garantizar que los adolescentes de la provincia puedan desarrollar habilidades y saberes fundamentales para el tiempo presente y su futuro en el siglo XXI.



Introducción al proyecto

02





Muchos artistas han usado la matemática para crear sus obras. Otros han ido por más y han medido la belleza de sus piezas artísticas por el uso de ciertas proporciones matemáticas. Por otro lado, muchos matemáticos han descrito a la matemática como un arte. Uno de ellos fue Luis Santaló, quien decía que la verdadera matemática era “método, arte y ciencia”. O como Henri Poincaré, quien sostenía que “la geometría es el arte de pensar bien y dibujar mal”. E inclusive Richard Courant, en su libro *¿Qué es la matemática?*, comparaba a la verdadera matemática con la literatura, ya que “trae una historia a tus ojos que te atrapa, intelectual y emocionalmente”.

¿Qué es entonces lo que provoca esta unión entre arte y matemática? La belleza y la libertad.

Todos hemos contemplado una **bella** obra de arte y nadie dudaría de que el arte nos permite expresarnos con **libertad**. Sin embargo, muchos pondrían en tela de juicio cómo estos dos ingredientes pueden caber para describir la matemática. Quienes desde tiempos remotos han sostenido esta visión son matemáticos como George Cantor, que decía que “la esencia de la matemática es su libertad”, y Beltrand Rusell, para quien “la matemática no solo posee la verdad, sino una suprema belleza”.

El desafío que les proponemos con este proyecto, “¿Cómo sacar a los artistas que tenemos dentro?”, es recorrer un camino de obras de arte llenas de matemática y de matemática llena de creación. Los invitamos a observar pinturas (algunas son fotografías de obras y otras son imágenes recreadas digitalmente para este cuadernillo en base a otras obras, todas ellas de artistas reconocidos) y objetos geométricos con una mirada atenta que nos permita descubrir qué se esconde en ellos: belleza y matemática. Los estudiantes tendrán la libertad de crear obras de arte matemáticas o matemática llena de arte, de sacar a su artista matemático o al matemático artista.

El producto final de este proyecto será compartir esa libertad y esa belleza en una *muestra de arte y matemática* donde no podrán escapar de contar el porqué de esta unión.

¡Manos a la obra!

Metas de aprendizaje

Se espera que los estudiantes:

1. Vivencien que muchas veces el trabajo matemático permite la creatividad.
2. Desarrollen la observación y la exploración.
3. Descubran propiedades de diferentes objetos geométricos.
4. Argumenten sobre la validez de sus afirmaciones.
5. Resuelvan problemas que involucren conocimientos geométricos.

Contenidos que se abordan

Se abordarán principalmente contenidos del eje “Geometría y medida” del diseño curricular de segundo año y se retomarán también conceptos de dicho eje de primer año:

- Construcciones, explicitando propiedades de figuras (triángulos, cuadriláteros y círculo) y cuerpos (prismas, pirámide, cono, cilindro, esfera), caracterizándolas y clasificándolas.
- Exploración y argumentación de las condiciones de lados, ángulos, diagonales y radios que permitirán la construcción de triángulos cuadriláteros y figuras circulares.
- Construcciones de figuras a partir de determinadas informaciones, usando diferentes útiles geométricos y explicitando los procedimientos utilizados.
- Validación empírica de las propiedades triangular y de la suma de los ángulos interiores de triángulos y cuadriláteros.
- Construcción y análisis de triángulos, argumentando sobre condiciones necesarias y suficientes para su congruencia.
- Copiado y construcción de circunferencias, círculos, mediatrices y bisectrices como lugares geométricos, con diferentes útiles de geometría y *software* de geometría dinámica.
- Análisis de las propiedades de las figuras a partir de las actividades de copiado y construcción.
- Congruencia de triángulos, condiciones necesarias y suficientes, construcciones y comprobaciones usando *software* de geometría dinámica.
- Construcciones de polígonos con regla no graduada y compás, y usando *software* de geometría dinámica, a partir de diferentes informaciones, justificando los procedimientos utilizados en base a los datos y a las propiedades de la figura.

- Formulación de conjeturas acerca de las relaciones entre ángulos opuestos por el vértice, adyacentes y determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal a partir de las propiedades del paralelogramo y produciendo argumentos que la validen.
- Análisis de afirmaciones de propiedades de figuras, reconociendo los límites de las pruebas empíricas.
- Comprobación del Teorema de Pitágoras empleando modelos geométricos (por superposición de áreas de figuras) y/o *software* de geometría dinámica. Aplicaciones en la resolución de situaciones planteadas en distintos contextos y marcos.
- Medición y estimación de cantidades, seleccionando la unidad y el instrumento adecuado, reconociendo la inexactitud de toda medición.

Evaluación de los aprendizajes

Las instancias de evaluación formativa que se proponen a lo largo del proyecto son dos, una a medio término y la otra en la semana 6, que es la producción final de los alumnos.

Durante las dos primeras semanas se irán construyendo algunos conceptos geométricos como ángulo, triángulo y lado y se trabajará sobre sus propiedades; esto será evaluado en la Actividad 6 de la Semana 3. Para esto encontrarán una rúbrica al finalizar la propuesta que les permitirá, al leer las resoluciones de los alumnos, establecer un esquema general de la situación en la que está el curso en relación a los contenidos trabajados. De todos modos, las actividades indicadas en las semanas siguientes permitirán revisar estos conceptos.

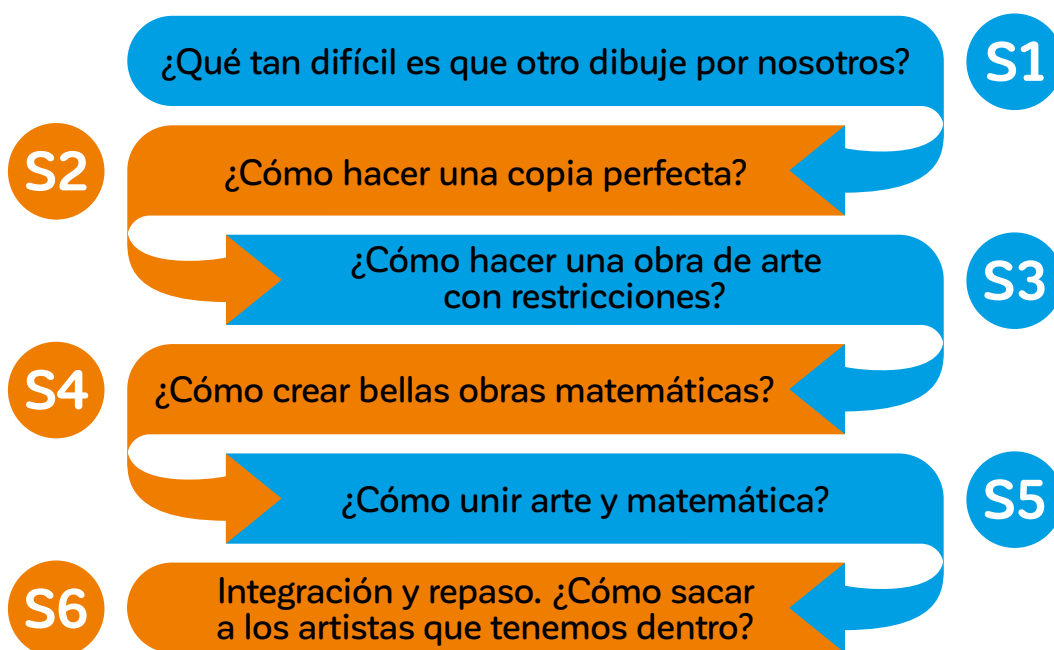
A partir de la Semana 4 se trabajará con el Teorema de Pitágoras y con cuadriláteros y sus propiedades.

Durante todo el proyecto se ofrecerán actividades que permitirán ir y volver entre arte matemático y matemática artística. Las propuestas harán que los estudiantes pongan en juego toda su capacidad creativa.

En las últimas páginas del cuadernillo se presenta una rúbrica para evaluar el producto final. Esta deberá ser compartida con los alumnos en la Actividad 0, para que conozcan de antemano cómo se los evaluará, ya que desde la primera semana deberán ir pensando en su obra de arte matemática para poder concretar el producto final.

Si bien presentamos rúbricas para estas dos propuestas en particular, todas las actividades les permitirán evaluar en proceso a sus alumnos y podrán elegir, si lo consideran necesario, otras que sean para entregar o para hacer la presentación oral.

Tabla resumen del proyecto



Secuencia semanal de trabajo



Semana 1 /

¿Qué tan difícil es que otro dibuje por nosotros?



SE ESPERA QUE LOS ESTUDIANTES:

- Observen figuras.
- Reconozcan la utilidad de tener un lenguaje preciso.
- Descubran propiedades de los ángulos entre paralelas.

Actividad 0. Presentación del proyecto

Esta actividad tendrá un tiempo estimado de un módulo de 40 minutos.

Momento 1. Introducción al proyecto

Presenten a sus alumnos la pregunta del proyecto, “¿Cómo sacar a los artistas que tenemos dentro?”, y comenten que el producto final, después de recorrer las seis semanas de aprendizaje, será la preparación de una muestra de arte y matemática a la que asistirá el público que quieran invitar, que pueden ser otros estudiantes, familiares o amigos de otras escuelas. En esta exhibición se presentarán las obras de arte que crearán a lo largo de este proyecto, con lo cual todos los grupos deberán hacer su propia pieza. Para la elaboración podrán elegir trabajar individualmente, en parejas o en grupos de a cuatro. También podrán seleccionar al resto de los integrantes, siempre argumentando las decisiones que tomen.

Este producto final tiene tres objetivos:

1. Sacar al artista que todos tenemos dentro, como indica el título.
2. Potenciar el aprendizaje de la matemática relacionándolo con el arte.
3. Compartir con otras personas el vínculo que existe entre el arte y la matemática.

En este primer momento, como mencionamos en la introducción, compartan la rúbrica de evaluación del proyecto final con sus estudiantes para que la tengan presente desde el comienzo del recorrido. Pueden dársela impresa para que la agreguen a sus carpetas.

¡Comenzamos!

Momento II. Rutina de pensamiento

Propónganles a sus estudiantes realizar la rutina de pensamiento “Puente 3-2-1” en relación al tópico de este proyecto, es decir, arte y matemática. En ella se les pide que escriban ideas, preguntas y metáforas sobre un tema, antes y después de su enseñanza.

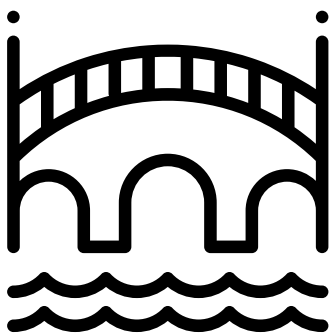
En este momento completarán la parte “antes del puente”. Luego se retomará esta rutina al finalizar este proyecto; es decir, se hará la parte del “después del puente”.

Realizamos la rutina de pensamiento “Puente 3-2-1”



1. Escribí **3 palabras** que vengan a tu mente sobre el tema “arte y matemática”.
2. Ahora, **redactá 2 preguntas** que se te ocurran en relación a este tema.
3. Finalmente, escribí **1 metáfora o 1 analogía** relacionada con el mismo tema.

Una vez que termines, guardá la hoja. Volveremos a usarla en algunas semanas...

Respuestas 3 ideas		Respuestas 3 ideas
2 preguntas		2 preguntas
1 metáfora o 1 analogía		1 metáfora o 1 analogía

Inviten a quienes lo deseen a compartir sus respuestas y comenten que retomarán esta actividad al finalizar el recorrido de este proyecto. Es recomendable recordar lo que escribieron para poder volver a estas ideas cuando lo consideren pertinente.

Actividad 1. Haciendo una obra de a dos

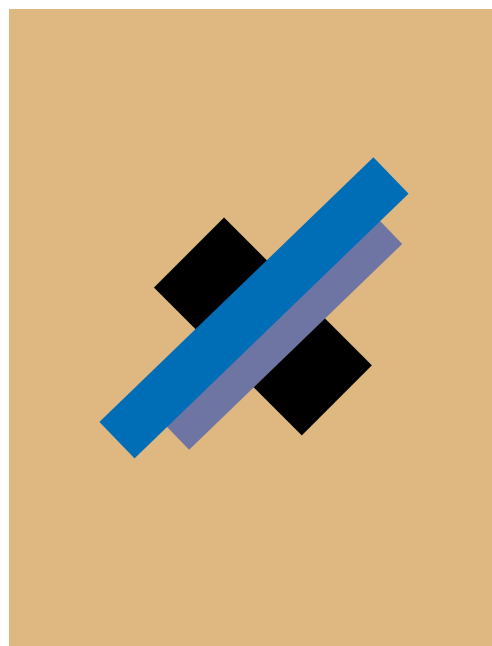
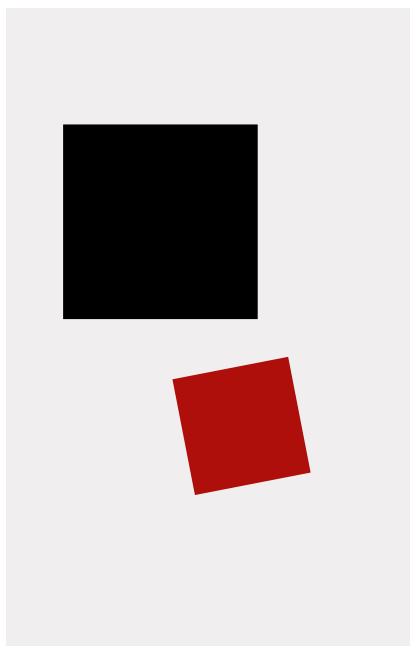
Esta actividad se desarrolla en un tiempo estimado de uno o dos módulos de 40 minutos. Los estudiantes trabajarán en parejas. Es necesario contar con fotocopias de las obras de arte a utilizar, con las *netbooks* con la imagen o con conexión a internet para buscar las versiones originales o mostrarlas usando el proyector.

Momento I. Observar la obra de arte

Comenten a los estudiantes que cada integrante de la pareja recibirá una obra de arte distinta y que no podrá mostrársela al compañero. El objetivo es que cada uno la observe y luego escriba en una hoja las instrucciones para que su compañero pueda, leyendo este escrito, recrear la obra. Estas instrucciones no podrán contener dibujos sino solamente texto.

Entreguen las obras (que fueron recreadas en base a dos pinturas de Kazimir Malévich) y den tiempo suficiente para que puedan escribir los mensajes con las instrucciones.

Pinturas recreadas en base a dos obras de Kazimir Malévich



Momento II. ¡A recrear la obra!

Pidan a sus estudiantes que intercambien los mensajes que escribieron, así el compañero puede recrear la obra. Den tiempo para que lo hagan.

Momento III. Compartimos entre todos

Recolecten las obras de los alumnos y peguen en el pizarrón las obras originales y las creaciones de los estudiantes y propongan debatir sobre lo ocurrido:

1. ¿Pudieron recrear las obras exactamente? ¿Qué dificultades se les presentaron?
2. ¿Siguieron al pie de la letra el mensaje que recibieron? ¿Tuvieron que tomar alguna decisión que no estaba dada explícitamente en el mensaje?
3. ¿Qué obras quedaron más parecidas? ¿Qué mensajes recibieron los que hicieron estas obras?
4. ¿Fueron precisos los mensajes que escribieron? ¿Qué dificultades se les presentaron a la hora de escribir o interpretar los mensajes?

La idea de este intercambio es retomar el tema de la precisión de los mensajes para que el otro pueda interpretar exactamente lo que yo quise decir. Y aquí surge una de las particularidades esenciales de la matemática. Por ejemplo, si yo digo “cuadrado” todo el mundo que conozca esa palabra imagina exactamente lo mismo, una figura de cuatro lados iguales.

La otra idea que queremos que aparezca es que una de las dificultades que seguramente se les presentó para poder enviar o interpretar los mensajes es el tema de la “inclinación” de los objetos. En este punto, es interesante exponer las diferencias entre haber dado una medida de un ángulo o simplemente haberlo explicado en palabras. Este hecho sirve para poner de manifiesto nuevamente lo expresado antes y es lo que nos va a dar pie para introducir la noción de ángulo.

Momento IV. Institucionalización

Una vez que rescaten del intercambio anterior lo necesario para poder hablar de inclinación y ángulos, introduzcan el concepto y recuerden la medida de algunos ángulos. Inviten a los alumnos a reflexionar sobre qué cambiarían en sus mensajes teniendo ahora como recurso la posibilidad de mencionar los ángulos.

Convóquenlos a compartir estas reformulaciones y pregunten si ahora son suficientemente precisas o si agregarían algo más.

Momento V. Actividad de metacognición

Dado que los alumnos se encontrarán formalmente por primera vez con la mayoría de los contenidos que se abordan en este proyecto, es importante y necesario profundizar el trabajo metacognitivo que hemos comenzado el año anterior. Para esto retomaremos una de las rutinas de pensamiento que utilizamos en el transcurso del Proyecto 1 y con la cual podemos lograr muy buenos resultados. Consiste en dedicar cinco minutos al finalizar la clase para que los estudiantes piensen y registren las respuestas a estas preguntas: “¿Qué aprendí hoy?” (ya trabajada durante el Proyecto 1) y “¿Cómo lo aprendí?”. Después, si lo consideran, pueden invitar a aquellos alumnos que lo deseen a compartir sus respuestas.

Esta actividad también puede ser propuesta mediante la rutina llamada “Tarjeta de salida”. En ella les pedimos a los estudiantes que anoten en un papel pequeño, del estilo de una tarjeta, “¿qué aprendí?” y “¿cómo lo aprendí?” y sus respuestas. Se puede pegar estas tarjetas en un afiche al finalizar la clase, se las pueden entregar al docente para retomarlas en la clase siguiente, se pueden intercambiar con un compañero o podrían quedar pegadas en la carpeta, para volver sobre ellas en otro momento.

Si bien a lo largo del proyecto plantearemos estas preguntas en el final de cada actividad, ustedes pueden proponerlas al finalizar la hora (por ejemplo, después de cada clase que dure dos o tres módulos de 40 minutos).

Es importante sostener este trabajo durante las seis semanas. Más adelante profundizaremos esta rutina.

Sería interesante que, en la actividad de metacognición, además de las cuestiones relacionadas con los ángulos surjan otras vinculadas con la importancia de la precisión del lenguaje para que otro interprete lo que queremos comunicar y el rol privilegiado que tiene la matemática en este sentido.

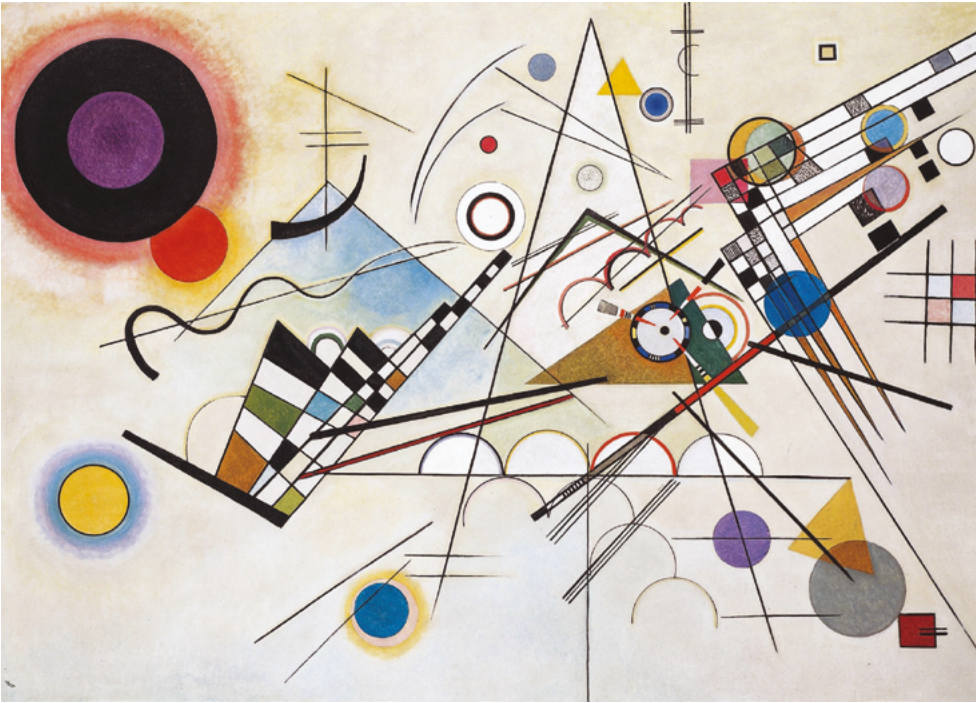
Actividad 2. ¡Sacamos los artistas matemáticos que tenemos dentro!

Esta actividad se desarrolla en un tiempo estimado de tres o cuatro módulos de 40 minutos. Se trabajará primero individualmente, luego en parejas y finalmente en grupos.

Momento I. Rutina de pensamiento “Veo, pienso, me pregunto”

Inviten a sus estudiantes a observar la obra *Composición VIII*, de Wassily Kandinsky, y a realizar individualmente la rutina “Veo, pienso, me pregunto”. Pueden presentarla usando el proyector, mediante las *netbooks*, o repartir algunas copias.

Composición VIII, de Wassily Kandinsky



DE DOMINIO PÚBLICO. EN WIKIMEDIA COMMONS

Realizamos la rutina de pensamiento “Veo, pienso, me pregunto”



- **Veo.** Describí lo que observás al mirar la obra de Kandinsky y anotalo en la columna **Veo** del cuadro que encontrarás a continuación.
- **Pienso.** Escribí en la columna **Pienso** todo lo que pensaste al observar.
- **Me pregunto.** En la columna **Me pregunto** escribí todos los interrogantes que te vengan a la cabeza luego de observar la obra y pensar.

Veo ↓ 	Pienso ↓ 	Me pregunto ↓ 

Luego de concretar la rutina propuesta, conversen con sus estudiantes en base a la pregunta “¿quién se animaría a hacer una copia de esta obra?”. Como en este momento seguramente surgirá el tema de la dificultad para hacer la copia, pueden indagar quién se atreve a elegir una parte de esta obra y hacer la copia solo de esa parte. Si además aclaran que puede ser tan pequeña como ellos deseen, probablemente sean más quienes se animen.

Coméntenles a sus alumnos que empezar reproduciendo una porción es una buena estrategia para hacer la copia y que esta misma estrategia es utilizada por los matemáticos cuando tienen un gran problema para resolver.

Finalmente, inviten a que cada estudiante realice la copia de la parte que elija. En este momento pueden pasar por los bancos para ayudarlos con la observación y preguntar qué necesitan (por ejemplo, medir algo o hacer relaciones entre figuras) para que la copia sea lo más fiel posible.

Momento II. Intercambio en parejas

Indíquenles a sus alumnos que trabajen con su compañero de banco, primero compartiendo lo que anotaron en el cuadro “Veo, pienso, me pregunto” y luego mostrando lo que dibujaron. El desafío ahora es que el compañero, mirando el dibujo, pueda descubrir de qué partecita de la obra se trata.

Pueden proponer, si lo creen conveniente, un intercambio de ideas con todo el grupo.

Momento III. Formamos los equipos de trabajo

En esta instancia realizarán en equipos la actividad “El recorte de Euclides”. Propónganles a los estudiantes recorrer el aula para agruparse con compañeros con los que no suelen trabajar o compartir mucho tiempo, para que aprovechen para conocerse un poco más y encarar el desafío de trabajar en equipo juntos.

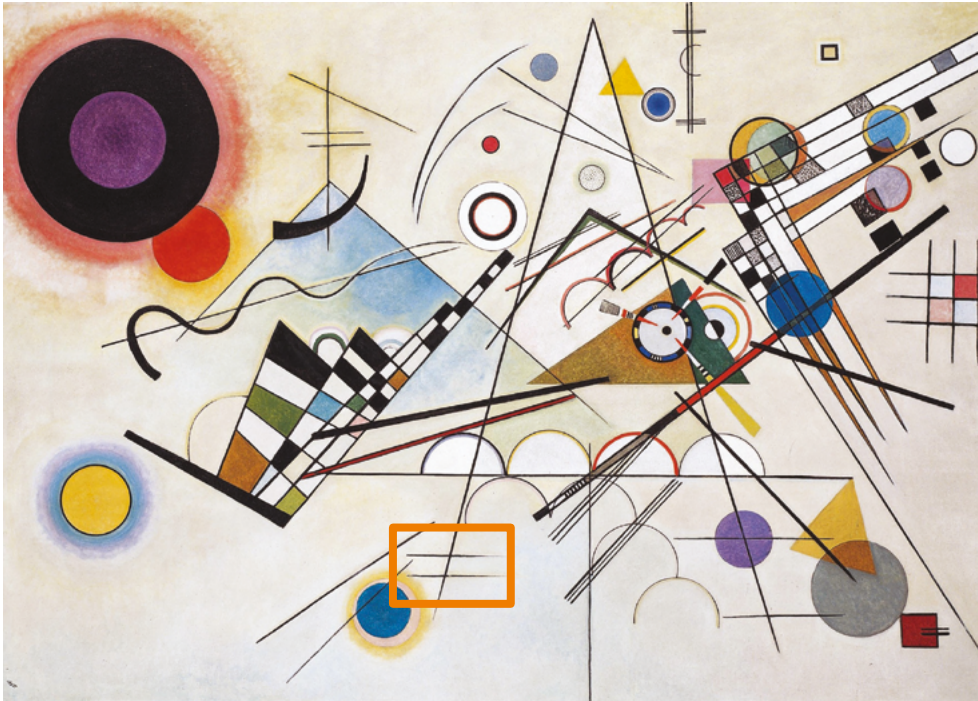
Una vez que todos se han reunido en grupos de tres o cuatro, inviten a los que quieran a compartir por qué han elegido ese equipo.

Momento IV. Trabajo en equipos

Convoquen a sus alumnos a realizar la actividad “El recorte de Euclides” en los equipos previamente formados.

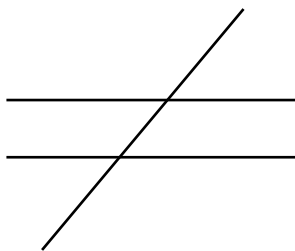
El recorte de Euclides

El matemático Euclides viajó en el tiempo para poder apreciar la obra de Wassily Kandinsky y, al igual que ustedes, eligió una parte de la misma.



DE DOMINIO PÚBLICO. EN WIKIMEDIA COMMONS

Este es el dibujo que hizo el matemático Euclides de ese recorte:



Detrás de su dibujo nos dejó este mensaje:

Queridos artistas del siglo XXI:

Tengo mis motivos para haber elegido este recorte y decido solo dibujar en blanco y negro estos tres elementos. He quedado fascinado de que, con solo mirar una pequeña parte de la obra de Kandinsky, se puedan descubrir grandes proposiciones de la geometría que yo mismo he creado.

La observación es clave, aunque como matemáticos sabemos que no se puede confiar plenamente en la vista. Por eso les anticipo que el par de rectas que parecen paralelas, en este caso lo son.

Redescubran todo lo que he creado y no se olviden de lo que decía René Descartes: “Ordeno mis pensamientos, empezando por los objetos más simples y más fáciles de conocer, para subir poco a poco hasta el conocimiento de las cosas más complejas”.

¡Mucha suerte con sus descubrimientos!
Euclides

PD: También me ha llamado la atención esto del software e internet, así que también los invito a usar Geogebra.

Después de haberles dado tiempo a los estudiantes para que lean la actividad, pueden hacer una puesta en común sobre qué observan en el dibujo de Euclides y cómo creen que se relaciona esto con lo que han estado viendo.

El objetivo es fomentar la observación y la exploración para que descubran las propiedades de los ángulos opuestos por el vértice y de los ángulos entre paralelas, conjeturen qué ángulos miden lo mismo y, en consecuencia, cuáles son suplementarios. Posteriormente, como dice Euclides en su nota, queremos transmitir que no alcanza con ver o medir para argumentar afirmaciones en matemática. En consecuencia, necesitamos profundizar en el camino de las pruebas. Para avanzar en la formulación de éstas, conviene comenzar con un argumento que justifique por qué los ángulos opuestos en vértice miden lo mismo.

Luego se debe convenir por qué es un axioma que los ángulos correspondientes entre paralelas son congruentes, para que los alumnos puedan dar argumentos de por qué serán congruentes los ángulos alternos internos entre paralelas. No se espera que hagan estas comprobaciones por su cuenta; ustedes pueden ayudarlos a ir escribiendo algunos argumentos cuando pasan por los grupos o en la puesta en común.

Momento V. Puesta en común e institucionalización

Realicen una puesta en común de las verdades que los grupos han ido descubriendo con relación a los ángulos involucrados en el dibujo. Una vez que se ponen de acuerdo con qué ángulos son congruentes entre sí en el dibujo y qué pares son suplementarios, indaguen sobre cómo están seguros de que esto es así. Retomen la idea de que no alcanza con ver o medir y pregunten cómo harían entonces para estar seguros. Pueden comenzar armando una prueba conjunta de la afirmación que sostiene que los ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo.

Si lo creen conveniente, comenten qué es un axioma y ejemplifiquen que el hecho de que los ángulos correspondientes entre paralelas sean congruentes es un axioma. Luego, pueden avanzar en pruebas para la congruencia de ángulos alternos.

Antes de poner los nombres a algunos pares de ángulos, inviten a sus estudiantes a que inventen sus propias denominaciones. Después deben indicarles los nombres que se usan universalmente.

Momento VI. Guardando ideas para el producto final

Coméntenles que sus productos finales podrían ir en sintonía con la obra geométrica de Kandinsky o con la obra artística de las proposiciones y las demostraciones que han logrado crear en la última actividad.

Ejemplifiquen que podrían copiar algunas de las obras vistas –u otras– utilizando conocimiento matemático, realizar una obra con algunas características de los objetos geométricos estudiados o, también, hacer obras matemáticas tal como fueron descubriendo y argumentando en la actividad “El recorte de Euclides”.

Inviten a sus estudiantes a crear en sus cuadernos o carpetas un documento titulado “Guardando ideas para el producto final” donde puedan registrar alguna idea en relación a la obra que harán para la muestra y también anotar qué de lo que estuvieron trabajando en estas dos actividades creen que les servirá para hacer su propia obra. Esto los ayudará a no perder de vista lo que se les va ocurriendo a medida que vamos recorriendo el proyecto.

Momento VII. Actividad de metacognición

Den a sus alumnos cinco minutos al finalizar cada clase o esta actividad para que puedan pensar las preguntas “¿Qué aprendí hoy?” y “¿Cómo lo aprendí?” y registrar estas reflexiones en sus cuadernos.

La idea es que en esta síntesis no solo salgan las propiedades de los ángulos, sino que también se rescaten cuestiones relacionadas con las demostraciones y con el recorte en partes para abordar un problema complejo.

Si lo creen conveniente, invítenlos a contar qué aprendieron y a que registren en un afiche lo que van sumando en cada actividad.

Semana 2 /

¿Cómo hacer una copia perfecta?



SE ESPERA QUE LOS ESTUDIANTES:

- Vivencien la importancia de dedicarle tiempo a la observación.
- Analicen la existencia y unicidad de diferentes objetos geométricos.
- Reconozcan la limitación de los sentidos y de las medidas para avanzar en soluciones de problemas geométricos.

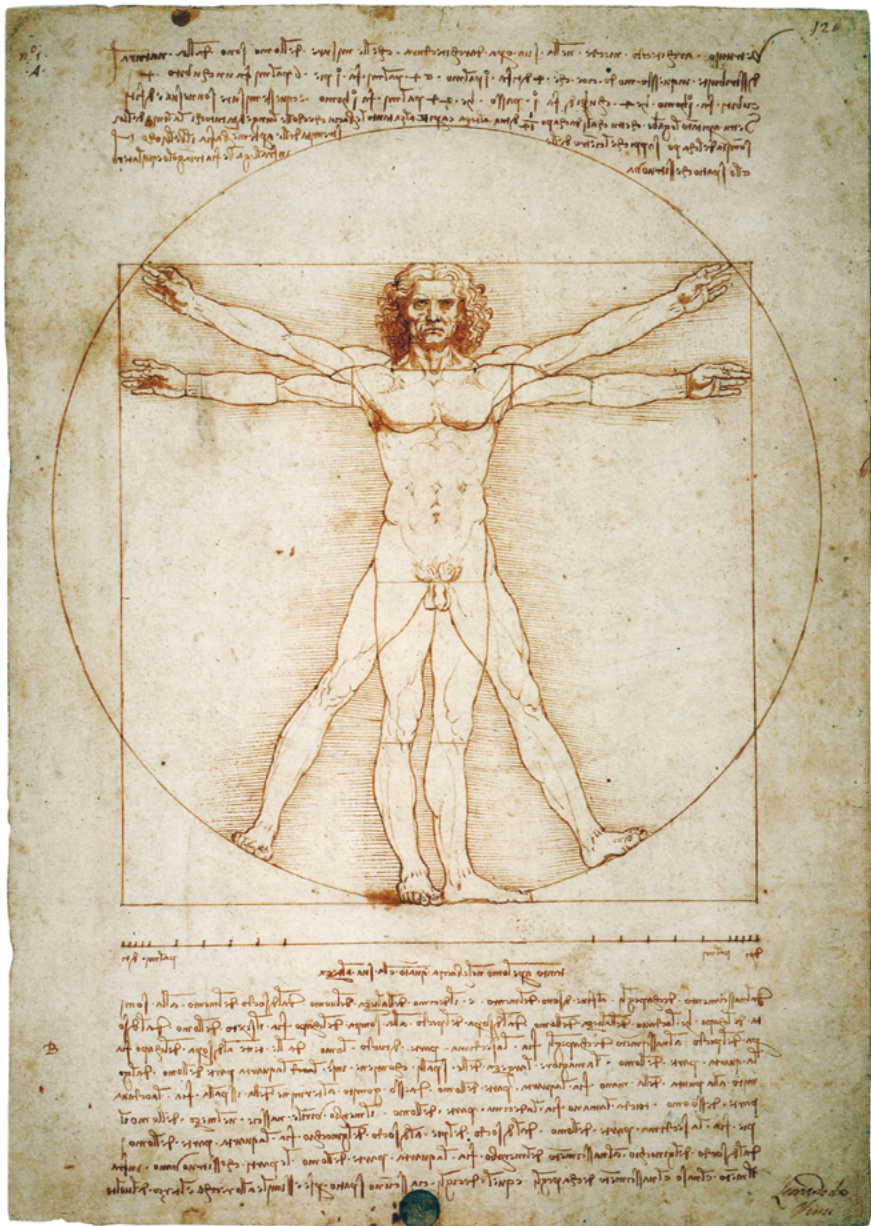
Actividad 3. El hombre de Vitruvio

Esta actividad se desarrolla en un tiempo estimado de uno o dos módulos de 40 minutos.

Momento I. Rutina de pensamiento “Veo, pienso, me pregunto”

Propónganles a sus estudiantes observar la obra *El hombre de Vitruvio*, de Leonardo Da Vinci, y realizar individualmente la rutina de pensamiento “Veo, pienso, me pregunto”.

El hombre de Vitrubio, de Leonardo Da Vinci



DE DOMINIO PÚBLICO: EN PIXABAY.COM

Realizamos la rutina de pensamiento “Veo, pienso, me pregunto”



- **Veo.** Describí lo que observás al mirar y anótalo en la columna **Veo** del cuadro que encontrarás a continuación.
- **Pienso.** Escribí en la columna **Pienso** todo lo que pensaste al observar.
- **Me pregunto.** En la columna **Me pregunto** anotá todos los interrogantes que te vengan a la cabeza luego de observar y pensar.

Veo ↓ 	Pienso ↓ 	Me pregunto ↓ 

Momento II. Puesta en común e institucionalización

Inviten a los alumnos a compartir lo que escribieron, retomen las preguntas que crean conveniente para avanzar en la relación de esta obra con la geometría y con el modo en que la matemática puede contribuir a la definición de belleza. Pueden usar el video de la charla TED de James Earle, en inglés y con subtítulos en castellano.

Indaguen sobre qué objetos geométricos aparecen en la obra y cómo podemos definirlos con precisión. Para la definición de cuadrado no creemos que se presenten dificultades, pero sí para la de circunferencia. Propongan dibujos que no sean circunferencias para las definiciones que vayan dando y retomen la obra para poder, finalmente, concluir la definición de circunferencia como lugar geométrico. Repregunten: ¿En dónde estaría, aproximadamente, el centro de la “circunferencia” en la obra de Da Vinci? ¿Qué significa esto?

Intercambien ideas sobre otras cuestiones matemáticas presentes en esta obra. Quienes se sientan interesados pueden profundizar sobre esta pieza para la muestra de arte geométrico y geometría artística.



DA VINCI´S VITRUVIAN
MAN OF MATH, DE JAMES
EARLE

[https://ed.ted.com/
lessons/da-vinci-s-
vitruvian-man-of-
math-james-earle](https://ed.ted.com/lessons/da-vinci-s-vitruvian-man-of-math-james-earle)

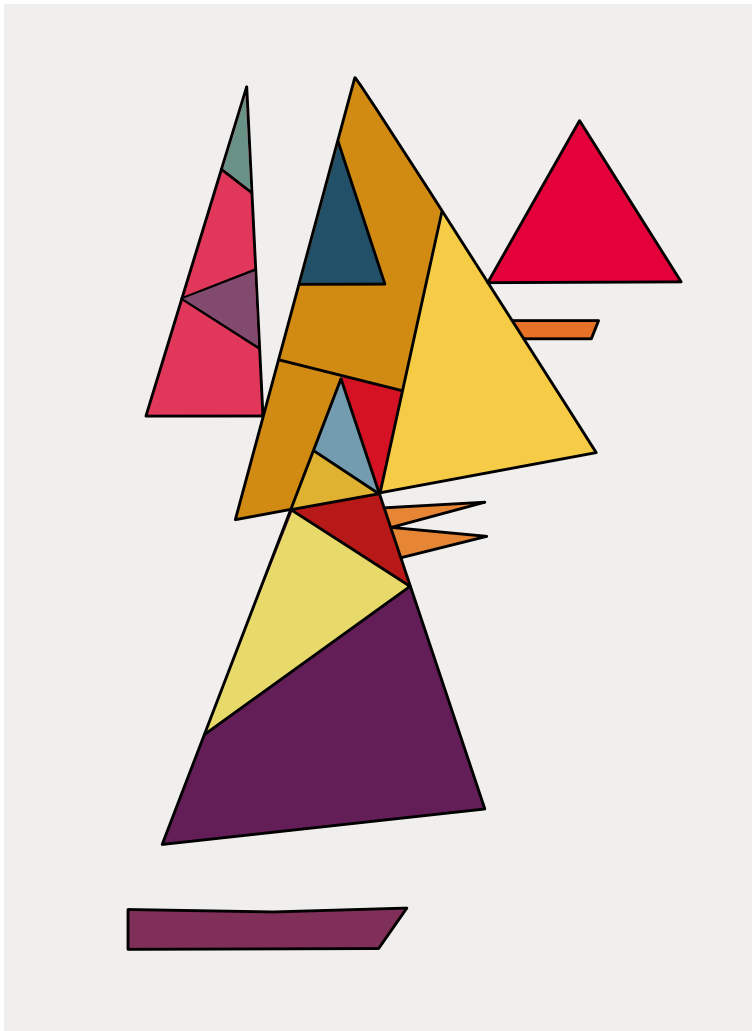
Actividad 4. ¡Más objetos geométricos en las obras de arte!

Esta actividad se desarrolla en un tiempo estimado de tres o cuatro módulos de 40 minutos.

Momento I. Copiado de obras

Propónganles a sus estudiantes hacer una copia utilizando solo líneas en blanco y negro, sobre papel o en Geogebra, de esta imagen que está basada en una obra de Wassily Kandinsky. Tienen que darles tiempo para que puedan avanzar y preguntarles por dónde les conviene empezar a dibujar.

Obra recreada en base a una pintura de Kandinsky



Momento II. Intercambio en parejas

Inviten a sus estudiantes a juntarse en duplas con su compañero de banco para observar las copias de las obras que han realizado y a reflexionar juntos sobre las siguientes preguntas:

1. ¿Qué tan parecida les quedó la obra?
2. ¿Qué consejo le darían a su compañero para que pueda mejorar la suya?
3. ¿Qué estrategias utilizaron para dibujarla?
4. ¿Cómo pueden estar seguros de que los cuatro triángulos principales son iguales en la obra original y en la suya?
5. ¿Alcanza con que los lados de los triángulos midan lo mismo para que los triángulos sean congruentes? ¿Por qué?
6. ¿Alcanza con que los ángulos de los triángulos midan lo mismo para que los triángulos sean congruentes? ¿Por qué?

Momento III. Trabajo en equipos de matemáticos

Convoquen a sus alumnos a juntarse de acuerdo a los grupos que armaron previamente recorriendo el aula. El objetivo es profundizar sobre propiedades matemáticas de los triángulos como las que empezaron a debatir antes. Para esto, presenten la actividad “Comunidad de matemáticos”, que podrán hacer en papel o usar el Geogebra.

Importante: debe quedar un registro de las ideas de los estudiantes en afiches o algún otro material que permita compartirlo en la siguiente clase, por si necesitan retomar lo trabajado.

Comunidad de matemáticos



Queridos matemáticos:

La misión que tenemos ahora es investigar las propiedades de los triángulos, así como lo hicimos con los ángulos cuando Euclides nos dejó la nota. Para esto, queremos retomar la pregunta que empezamos a pensar en parejas anteriormente: ¿cuándo dos triángulos son congruentes? Además, tenemos otros interrogantes para hacernos con relación a los triángulos. Por ejemplo, ¿hay alguna relación entre sus lados? ¿Y entre sus ángulos? ¿Y entre sus ángulos y lados? ¿Se les ocurre alguna otra pregunta?

Podremos elegir al menos una para empezar a investigar y crear nuestros propios teoremas, o bien podemos comenzar con los desafíos que se citan a continuación, que también servirán para investigar las preguntas planteadas.

Esperamos que, como comunidad de matemáticos con compromiso con la sociedad, podamos avanzar al máximo en el descubrimiento de las propiedades geométricas que esconden los triángulos ¡Éxito en esta tarea! ¡Y no se olviden de argumentar sus afirmaciones!

Lista de desafíos

1. Construir un triángulo cuyos lados midan 3 cm, 5 cm y 7 cm. ¿Existe? ¿Es único?
2. Construir un triángulo cuyos lados midan 3 cm y 5 cm. ¿Existe? ¿Es único?
3. Construir un triángulo cuyos lados midan 3 cm, 5 cm y 8 cm. ¿Existe? ¿Es único?
4. Construir un triángulo cuyos ángulos midan 30 grados, 60 grados y 90 grados. ¿Existe? ¿Es único?
5. Construir un triángulo cuyos ángulos midan 30 grados, 60 grados y 110 grados. ¿Existe? ¿Es único?
6. Construir un triángulo cuyos ángulos midan 31 grados, 61 grados y 90 grados. ¿Existe? ¿Es único?
7. Construir un triángulo con un lado de 5 cm y que los dos ángulos que forman los otros dos lados con éste, sean de 30 y 45 grados. ¿Existe? ¿Es único?
8. Construir un triángulo con un lado de 5 cm, otro de 7 cm y que el ángulo comprendido entre esos dos lados mida 55 grados. ¿Existe? ¿Es único?
9. Construir un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 5 cm y 7 cm y además tiene un ángulo de 30 grados.

Una vez que piensen estos desafíos, vuelvan sobre las preguntas planteadas al comienzo e intenten armar su publicación para el resto de la comunidad con todas las cuestiones que hayan podido descubrir y probar.

Momento IV. Puesta en común e institucionalización

El objetivo es compartir los avances de los diferentes equipos para ir haciendo una construcción colectiva de las propiedades de los triángulos: desigualdad triangular, suma de los ángulos interiores y criterios de congruencia de triángulos.

Antes, al pasar por los grupos e indagar sobre los avances, vayan planificando en qué orden tomarán la palabra los diferentes equipos y qué preguntas realizarán para que se pueda lograr esta construcción colectiva.

Es importante que además de los resultados en sí mismos se avance sobre los argumentos que los sustentan, aunque no sean pruebas formales.

Momento V. Guardando ideas para el producto final

Cuéntenles a sus estudiantes que la copia de una obra de arte con un relato de qué conocimientos geométricos tuvieron en cuenta para hacerla, así como la publicación de los descubrimientos de propiedades geométricas que hicieron al final, resultan dos posibles creaciones para exponer en la muestra final.

Propónganles a sus alumnos retomar lo que anotaron la semana pasada en “Guardando ideas para el producto final” para profundizar y dar más precisiones o sumar otra idea distinta. Para esto, pueden volver a mirar las actividades presentadas para ver si les interesaría profundizar algo de lo ya trabajado. El objetivo es que vayan guardando opciones para elaborar su obra para la muestra.

Momento VI. Actividad de metacognición

Den a sus estudiantes cinco minutos al finalizar esta actividad para que puedan pensar las preguntas “¿Qué aprendiste hoy?” y “¿Cómo lo aprendiste?” y registrar sus reflexiones en sus cuadernos.

Es importante que puedan orientarlos para que identifiquen qué aprendizajes del área de matemática lograron, para ayudarlos a tomar conciencia de su propio proceso como aprendices.

Seguramente aparezcan en las reflexiones algunos aprendizajes transversales (y sumamente importantes) como el trabajo en equipo o la creatividad. Pero la idea es que en esta actividad surjan también cuestiones relacionadas con las propiedades de los triángulos y con la necesidad de argumentar nuestras afirmaciones.

Pueden invitar a sus alumnos a que cuenten qué aprendieron y e ir registrándolo en un afiche.

Semana 3 /

¿Cómo hacer una obra de arte con restricciones?

SE ESPERA QUE LOS ESTUDIANTES:

- Observen y exploren objetos geométricos.
- Entiendan la diferencia entre conjetura y afirmación (proposición, teorema).
- Avancen en el desarrollo de pruebas.



S3

Actividad 5. Limitaciones para crear

Esta actividad se desarrolla en un tiempo estimado de dos o tres módulos de 40 minutos y se podrá continuar para exponer en la muestra final¹.

Momento I. Video

Comiencen mostrando el video de la charla TED “Aceptando el temblor”. Pueden verlo en el proyector o en parejas o grupos en las *netbooks*. Sugerimos detenerlo en el minuto 2:30.

Luego de la visualización realicen un intercambio con sus estudiantes a partir de las siguientes preguntas: ¿Qué les llamó la atención? ¿Cuál es el temblor que creen que tendrían que abrazar? ¿Qué limitaciones se pondrían para crear?

Momento II. Obra con limitaciones

Inviten a sus alumnos a realizar una obra de arte abstracto en la cual las únicas figuras que podrán dibujar son triángulos y círculos y que, además, esconda un secreto matemático. Pueden elegir trabajar individualmente, en parejas o en grupos de a cuatro. Podrán hacerlo en papel, con Paint o en Geogebra.

¡Manos a la obra!



“ACEPTANDO EL TEMBLOR”.
PHIL HANSEN
https://www.ted.com/talks/phil_hansen_embrace_the_shake?language=es#t-578634

1. También se podrá retomar en los CAJ los sábados o con el docente de arte.

Momento III. Muestra de avances

Convoquen a todos los estudiantes que lo deseen a mostrar los avances de sus obras y a compartir con los compañeros qué les gustaría incluir en su creación.

Indaguen sobre qué dificultades se les presentaron a la hora de realizar la obra con estas limitaciones y si, como a Phil, éstas los ayudaron a ser más creativos.

Momento IV. Actividad de metacognición

Den a sus alumnos cinco minutos al finalizar esta actividad para que puedan pensar las preguntas “¿Qué aprendiste hoy?” y “¿Cómo lo aprendiste?” y registrar-lo en sus cuadernos.

Actividad 6. ¡A sacar los matemáticos que tenemos dentro!

Esta actividad se desarrolla en un tiempo estimado de dos o tres módulos de 40 minutos y se elabora en parejas.

Momento I. Elección del desafío

Propónganles a sus estudiantes trabajar en los equipos que formamos previamente con la dinámica de recorrido por el aula. Pueden elegir sobre qué van a crear o ustedes pueden asignarles un desafío o más a cada equipo, de acuerdo a lo que crean conveniente.

Coméntenles que después de resolver los desafíos el producto a entregar es una “comunicación científica para presentar ante el Ministerio de Matemática Artística” con los resultados a los que hayan podido arribar y los argumentos que avancen en sus pruebas.

Esta “comunicación científica” será evaluada con la rúbrica que se ofrece a continuación. Es conveniente que la compartan con sus estudiantes previamente al trabajo.

Momento II. Trabajo en equipos

Repartan las consignas de la actividad “¡A seguir creando!” e indiquen si tienen que elaborar la publicación con uno o más desafíos, cuáles son o si va a poder elegirlos cada grupo.

A seguir creando



Queridos matemáticos:

La misión que tenemos ahora es investigar propiedades de otros objetos. Los desafíos vigentes en la comunidad matemática y que el Ministerio de Matemática Artística les propone resolver son los siguientes:

Desafío Pitágoras

Hemos conjeturado que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. Esperamos una comunicación científica que pruebe esto.

Desafío Fermat

Hemos conjeturado que los ángulos alternos internos entre paralelas son congruentes. Esperamos una comunicación científica que pruebe esto.

Desafío Gauss

Hemos conjeturado que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados. Esperamos una comunicación científica que pruebe esto.

Desafío Galois

Necesitamos conjeturar propiedades de los triángulos isósceles. ¿Qué pasa con sus ángulos? ¿Pueden conjeturar otras propiedades? Esperamos una comunicación científica que exprese las conjeturas y avance en las pruebas.

Desafío Hilbert

Tenemos un ángulo. Necesitamos conjeturar qué puntos están a la misma distancia de ambas rectas: ¿qué objeto se forma? Esperamos una comunicación científica que exprese las conjeturas y avance en las pruebas.

Desafío Walsh²

Tenemos un segmento. Necesitamos conjeturar qué puntos están a la misma distancia de ambos extremos: ¿qué objeto se forma? Esperamos una comunicación científica que exprese las conjeturas y avance en las pruebas.

2. Miguel Walsh es un matemático argentino nacido en 1987 que ya ha obtenido grandes premios internacionales, los mismos que han ganado en su juventud los ganadores de la Medalla Fields. Más información en: https://es.wikipedia.org/wiki/Miguel_Walsh. En la entrevista realizada por Nora Bar para La Nación cuenta que la matemática era la materia que menos le gustaba cuando iba a la escuela. Se puede compartir con los estudiantes, pues habla sobre la creatividad. Disponible en: <https://www.lanacion.com.ar/1704313-el-matematico-argentino-miguel-walsh-de-26-anos-gano-el-premio-ramanujan>

Necesitamos que cada comunidad nos envíe sus comunicaciones científicas al Ministerio de Matemática Artística con las conjeturas y pruebas de estos resultados.

¡Que el arte los acompañe!

Rúbrica para evaluar la Actividad 6 u otra que consideren pertinente

La siguiente rúbrica servirá para evaluar los aprendizajes de los estudiantes. Deben presentarla al comenzar la actividad para que conozcan de antemano cómo serán evaluados. Si bien proponemos usarla para evaluar la Actividad 6, como verán algunos ítems servirán también para otras consignas que ustedes consideren, inclusive pudiendo hacerse una autoevaluación o una evaluación entre pares.

	En camino	Logrado	Avanzado	Experto
Trabajo en equipo	Presenté dificultades para escuchar las ideas de los demás e interfiere en que otros las escuchen.	Escuché las ideas de los demás y compartí las mías.	Escuché las ideas de los demás y colaboré para que todos lo hicieran. Compartí mis ideas con el grupo y participé con distintos aportes en el trabajo propuesto.	Escuché las ideas de los demás y colaboré para que todos lo hicieran. Compartí mis ideas con el grupo y participé con distintos aportes en el trabajo propuesto. Ayudé para que todos los integrantes del equipo pudieran hacer sus aportes.
Resolución de problemas. Seleccionar y aplicar las estrategias adecuadas para resolver el problema (explorar, anticipar, planificar, calcular, representar)	Tuve dificultades para seleccionar estrategias adecuadas para resolver el problema.	Elegí estrategias adecuadas para resolver el problema, pero no las apliqué correctamente.	Elegí estrategias adecuadas para resolver el problema. Las apliqué correctamente.	Elegí estrategias adecuadas para resolver el problema. Las apliqué correctamente. Escribí con precisión mi razonamiento para resolver el problema.

	En camino	Logrado	Avanzado	Experto
Conocimiento geométrico (concepto de ángulo, concepto de triángulo, propiedades de ángulos entre paralelas, propiedades de triángulos)	Tuve dificultades para aplicar correctamente las definiciones de los conceptos trabajados.	Apliqué correctamente las definiciones de los conceptos trabajados, pero no recordé sus propiedades.	Apliqué correctamente las definiciones de los conceptos trabajados y utilicé sus propiedades para avanzar en mi producción matemática.	Apliqué correctamente las definiciones de los conceptos trabajados y utilicé sus propiedades para avanzar en mi producción matemática. Escribí mi producción matemática con precisión.
Razonamiento y argumentación. Análisis y evaluación de argumentos (encontrar razones y conclusiones, descubrir suposiciones)	Tuve dificultades para analizar y evaluar.	Analicé y evalúe desde el sentido común.	Analicé y evalúe con argumentos. No logré llegar a conclusiones.	Analicé y evalúe con argumentos. Plantee conclusiones.

Semana 4 /

¿Cómo crear bellas obras matemáticas?



SE ESPERA QUE LOS ESTUDIANTES:

- Entiendan la formulación del Teorema de Pitágoras.
- Vivencien que hacer matemática requiere creatividad.
- Resuelvan problemas que involucren las propiedades de ángulos y triángulos.

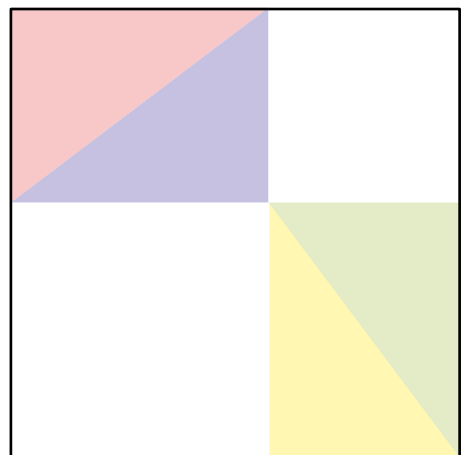
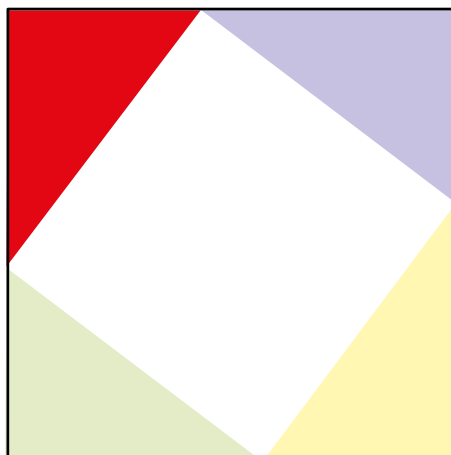
Actividad 7. El arte en las baldosas

Esta actividad se desarrolla en un tiempo estimado de dos o tres módulos de 40 minutos.

Momento I. Rutina de pensamiento “Veo, pienso, me pregunto”

Preséntenles a sus estudiantes los siguientes embaldosados en diferentes colores vistos por las calles de Tucumán.

Invítenlos a realizar la rutina de pensamiento “Veo, pienso, me pregunto” sobre estas imágenes.



Realizamos la rutina de pensamiento “Veo, pienso, me pregunto”



- **Veo.** Describí lo que observás al mirar y anótalo en la columna **Veo** del cuadro que encontrarás a continuación.
- **Pienso.** Escribí en la columna **Pienso** todo lo que pensaste al observar las imágenes.
- **Me pregunto.** En la columna **Me pregunto** anotá las inquietudes o interrogantes que surjan luego de observar y pensar.

Veo 	Pienso 	Me pregunto 

S4

Momento II. Puesta en común

Convoquen a los estudiantes que lo deseen a compartir lo que anotaron en el cuadro de la rutina. La idea es que en la columna “Veo” puedan enunciar que hay cuatro triángulos rectángulos en apariencia congruentes. ¿Podemos probar que son congruentes? Avancen en demostrarlo con el aporte de quienes vayan participando, para así revisar los criterios de congruencia de triángulos. Indaguen qué otras figuras geométricas aparecen en los embaldosados. ¿Podemos estar seguros de que son cuadrados?

Comenten que detrás de estas baldosas se esconde el famoso Teorema de Pitágoras, que relaciona las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

Momento III. Trabajo individual, en parejas o en grupos

El objetivo es descubrir cómo en esas baldosas se esconde el Teorema de Pitágoras. Para esto podrán trabajar individualmente, con su compañero de banco o en grupos (de tres o cuatro personas). Tomándose unos minutos deberán realizar esta elección con la argumentación correspondiente.

Quienes se animen podrán intentar deducir esa relación observando las baldosas. La idea es que puedan descubrir que la parte blanca de cada cuadrado mide lo mismo y establezcan qué relación tiene cada una con los lados del triángulo rectángulo. Como las tres figuras blancas son cuadradas, sabemos que sus áreas son a^2 , b^2 y c^2 y, de igualarlas, sale la relación pitagórica. Quienes no lo hayan descubierto podrán buscar en internet qué dice el Teorema de Pitágoras y seguir observando las baldosas para analizar cómo se esconde ahí este famoso teorema. Es importante su intervención en los grupos para que todos comprendan cómo es que allí aparece el Teorema de Pitágoras.

Momento IV. Intercambio de a pares

Una vez que todos han logrado descubrir la relación entre el Teorema de Pitágoras y las baldosas del gráfico o han avanzado en este descubrimiento, la clase se organiza de a pares (dos alumnos, dos duplas o dos grupos) y los estudiantes comparten lo que pensaron. La idea de este intercambio es que puedan afianzar sus comunicaciones para luego compartir sus reflexiones con la clase entera.

Momento V. Puesta en común e institucionalización

Inviten a sus alumnos a que compartan qué dice el Teorema de Pitágoras y por qué está escondido en estas baldosas. Aprovechen esta instancia para escribir en el pizarrón el enunciado del teorema y para hacer hincapié sobre sus hipótesis. Pueden poner algunos ejemplos de triángulos no rectángulos para fortalecer esta idea.

Momento VI. Otras demostraciones

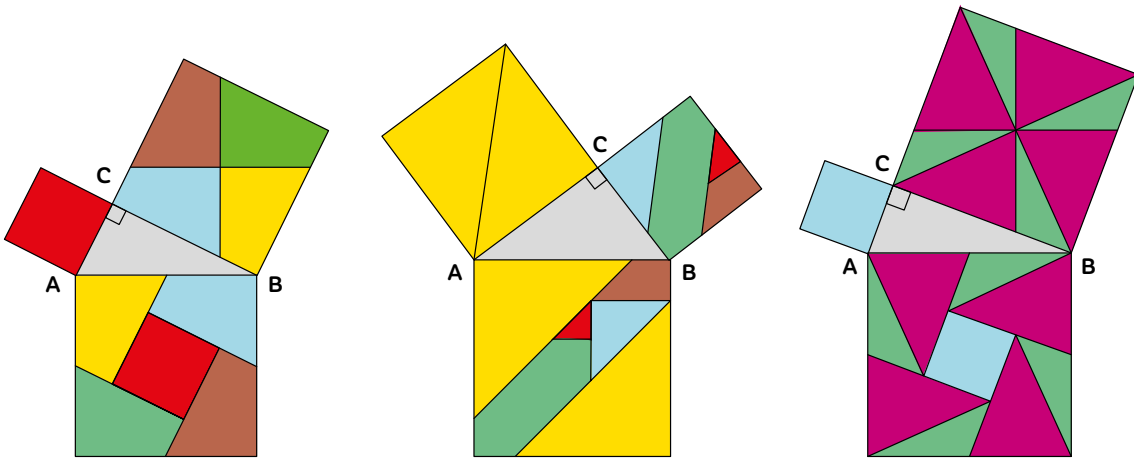
Indiquen a los alumnos a leer el texto y hacer las actividades que se proponen en “Arte pitagórico”.

Arte pitagórico



Sin dudas, el Teorema de Pitágoras ha despertado la creatividad de muchísimos matemáticos a lo largo de la historia, quienes han ido encontrando miles de demostraciones, aunque muchas pueden haber sido obtenidas por una limitación puesta en la Edad Media, que exigía una nueva demostración del teorema para poder alcanzar el título de “Magister matheseos”.

Todos estas figuras (¡y muchísimas más!) esconden pruebas del Teorema de Pitágoras. ¿Se animan a explicarlas?



Inclusive los propios Euclides y Leonardo Da Vinci tienen sus propias demostraciones del teorema, para las cuales usaron los siguientes dibujos.

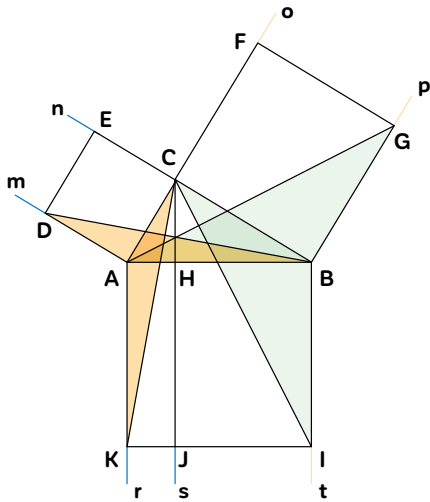


Figura de análisis de Euclides

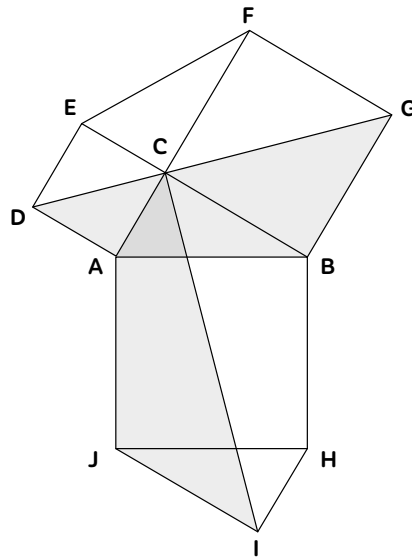


Figura de análisis de Leonardo Da Vinci

¿Cuál es tu figura preferida para esconder el Teorema de Pitágoras?

Momento VII. Guardando ideas para el producto final

La obra para la muestra final de arte y matemática podría ser explicar alguna demostración del Teorema de Pitágoras, ya sea en afiche, en Geogebra o con una animación dinámica o video. Si lo consideran, proyecten el video de Matemáticas cercanas que presenta algunas demostraciones dinámicas.



MATEMÁTICAS CERCANAS

[https://
matematicascercanas.
com/2016/06/06/
demostraciones-
teorema-de-pitagoras/](https://matematicascercanas.com/2016/06/06/demostraciones-teorema-de-pitagoras/)

Inviten a sus estudiantes a retomar sus anotaciones hechas en “Guardando ideas para el producto final” y analizar si, habiendo explorado estas nuevas propuestas, les gustaría profundizar sobre alguna o si prefieren indagar sobre otras. Propónganles registrar todas las nuevas reflexiones o mejoras a las ideas ya anotadas.

Aprovechen este espacio para preguntar qué obra presentarán en la muestra y ayudar a aquellos que aún no sepan qué categoría elegir. Sería deseable que al finalizar esta semana todos tengan en mente qué tipo de obra harán y alguna breve idea de por dónde ir.

Momento VIII. Actividad de metacognición

Den a sus alumnos cinco minutos para que piensen respuestas para las preguntas “¿Qué aprendí hoy?” y “¿Cómo lo aprendí?” y registren en sus cuadernos esas reflexiones. La idea es que puedan anotar que han aprendido algo sobre Pitágoras, sus demostraciones, la matemática escondida en el arte o el arte escondido en la matemática.

Actividad 8. Congreso de matemáticos

Momento I. Formación de equipos

Cuéntenles a sus estudiantes que en esta actividad van a tener que poner toda su creación para resolver “problemas abiertos” que posteriormente serán presentados en un congreso de matemática.

Para esto, formarán equipos de trabajo de cuatro, cinco o seis integrantes, con la condición que entre ellos se puedan cubrir todos los desafíos realizados en la Actividad de la semana pasada, ya que seguramente se necesite de los mismos para resolver estos problemas abiertos. ¡Nada mejor que contar con un representante de cada desafío en el equipo!

Momento II. Trabajo en equipos

Inviten a sus alumnos a trabajar con las consignas de la actividad “Problemas abiertos”.

Problemas abiertos



Los problemas abiertos en matemática son aquellos enunciados que se han planteado y que aún no se han logrado resolver. En la actualidad hay muchos: dos de los más conocidos son la conjetura de Riemman y la conjetura (fuerte) de Golbach. En nuestra comunidad matemática del pasado tenemos otros problemas geométricos “abiertos” que les contaremos; algunos provienen de la matemática y otros de otras ciencias, pero se necesita de la matemática para poder resolverlos, al igual que ocurre en el mundo real.

1. *Altura de las pirámides de Egipast*

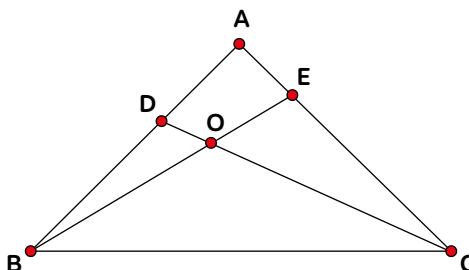
En la lejana ciudad de Egipast se ha encontrado una pirámide milenaria, de base cuadrada y caras formadas por triángulos equiláteros, que sus ciudadanos quisieron medir. Tienen las medidas de los lados de la base, pero dicen que no pueden medir su altura ya que no tienen ningún elemento para “ir hasta la punta”. Es por eso que han llamado a la comunidad matemática para que los ayudemos y como punto de partida nos envían una foto de la pirámide.



DE DOMINIO PÚBLICO. EN PIXABAY.COM

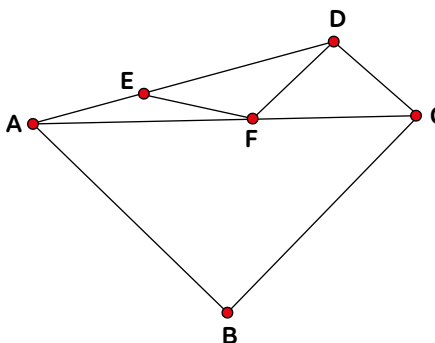
2. Problema del triángulo³

En la siguiente figura, ABC es un triángulo con $AB = AC$ y el ángulo CAB mide 90 grados. Además, el ángulo DCA mide 20 grados y el ángulo COB es igual a 4 veces el ángulo OBC. ¿Cuánto mide el ángulo COB? ¿Cuánto mide el ángulo ABE?



3. Problema de los triángulos encajados⁴

En esta figura, el triángulo ABC es rectángulo e isósceles, $AE = EF = FD = DC$ y el ángulo ADC mide 144 grados. ¿Cuánto mide el ángulo AEF? ¿Cuánto mide el ángulo EFD? ¿Cuánto mide el ángulo BCD?



Una vez leídos los tres problemas, cada pequeño grupo de investigación elegirá uno e intentará resolverlo. No se olviden del consejo de René Descartes: “Ordeno mis pensamientos, empezando por los objetos más simples y más fáciles de conocer, para subir poco a poco hasta el conocimiento de las cosas más complejas”.

Antes de comenzar, recuerden escribir por qué lo eligieron.

3. Problema extraído de http://www.oma.org.ar/enunciados/zonal_%C3%B1_2018.pdf

4. Problema extraído de http://www.oma.org.ar/enunciados/nacional_%C3%B1_2018.pdf

El objetivo de esta actividad es que puedan reinvertir los conocimientos geométricos trabajados en la resolución de nuevos problemas.

El problema 1 requiere una tarea extra respecto a los otros dos, que es la de poder modelizar previamente la situación a estudiar, es decir, hacer una figura de análisis (triángulo rectángulo) que permita visualizar el problema planteado.

En los otros dos, la figura de análisis ya está dada, entonces el primer paso será anotar en ella todos los datos que nos brinda el enunciado. Luego habrá que agudizar la observación y releer las propiedades de los triángulos ya estudiadas, para ir hacia las resoluciones. Valoren los avances parciales. Algunos estudiantes podrán ir explorando qué medidas pueden tener los ángulos de acuerdo a los datos mencionados y no necesariamente plantearán ecuaciones para resolverlo. Valoren estas ideas, aunque luego retomen el planteo de ecuaciones en la puesta en común.

Momento III. Intercambio de soluciones de a pares

Propónganles a sus estudiantes asociarse con otro equipo con el requisito de que no hayan analizado el mismo problema. Un grupo tiene que contarle al otro el problema elegido y cómo lo resolvieron o qué avances hicieron. Luego, intercambian los roles.

Se deben asegurar que tanto sus integrantes como los del otro equipo comprendan la resolución, ya que en la puesta en común ningún equipo podrá contar avances de su problema elegido.

Den tiempo para que esto pueda ocurrir.

Momento IV. Puesta en común

Inviten a sus alumnos a leer cada uno de los problemas y a compartir los avances o las soluciones que han encontrado. Recuerden que, en principio, ninguno puede hablar del problema que eligió resolver.

Momento V. Actividad de metacognición

Den a sus estudiantes cinco minutos al finalizar para que puedan pensar las preguntas “¿Qué aprendí hoy?” y “¿Cómo lo aprendí?” y registrar sus ideas en sus cuadernos.

Semana 5 /

¿Cómo unir arte y matemática?



SE ESPERA QUE LOS ESTUDIANTES:

- Observen y clasifiquen cuadriláteros.
- Descubran propiedades de los cuadriláteros.
- Argumenten la validez de sus afirmaciones.

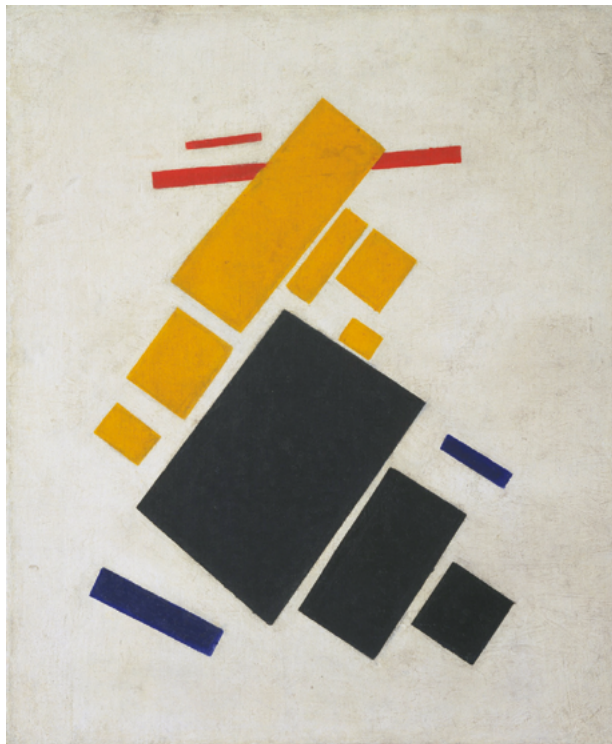
Actividad 9. Cuatro obras de arte

Esta actividad se desarrolla en un tiempo estimado de dos o tres módulos de 40 minutos.

Momento I. Rutina de pensamiento “Veo, pienso, me pregunto”

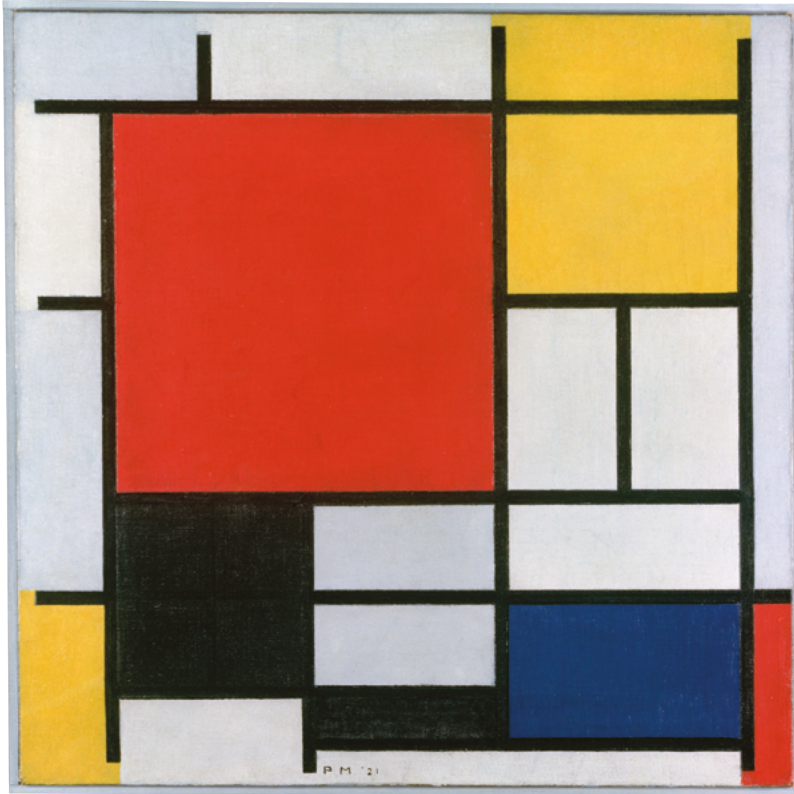
Presenten a sus estudiantes estas imágenes de obras de arte de Kazimir Malévich y Piet Mondrian y de otras dos recreadas en base a cuadros de Paul Klee y Wassily Kandinsky.

Avión volando, de Kazimir Malévich



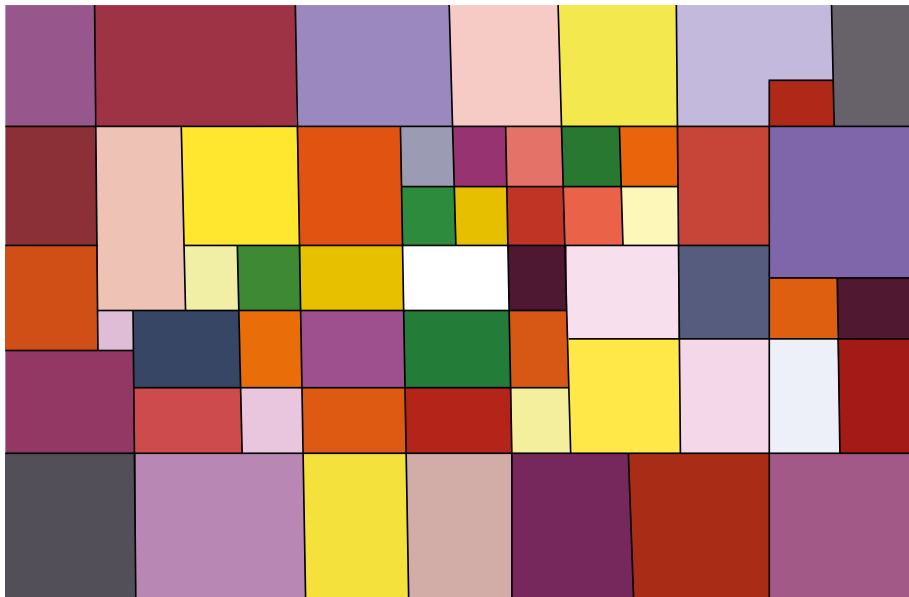
DE DOMINIO PÚBLICO. EN WIKIMEDIA COMMONS.

Composición en rojo, amarillo y azul, de Piet Mondrian

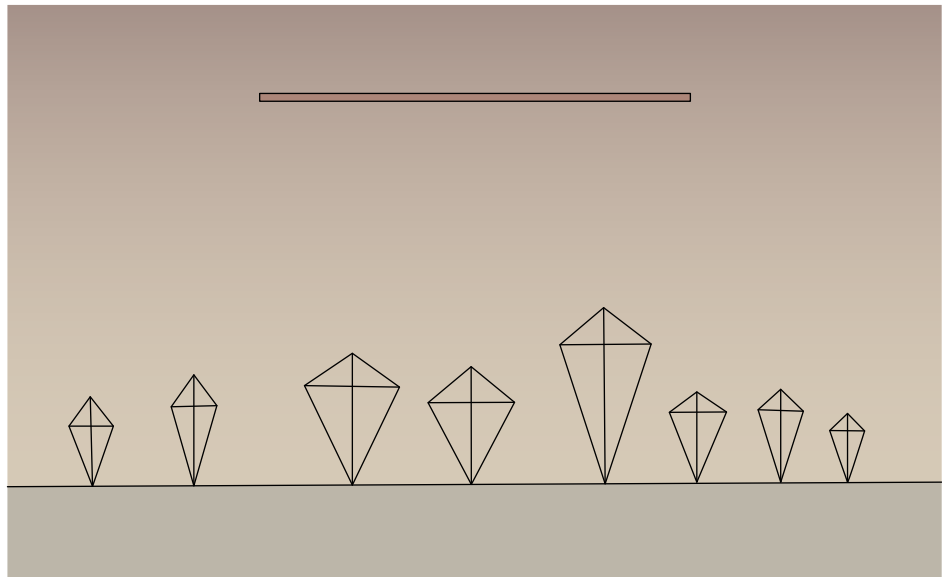


DE DOMINIO PÚBLICO. EN WIKIMEDIA COMMONS

Obra recreada en base a una pintura de Paul Klee



Obra recreada en base a una pieza de Wassily Kandinsky



Inviten a sus estudiantes a realizar la rutina de pensamiento: “Veo, pienso, me pregunto” observando estas obras.

Realizamos la rutina de pensamiento “Veo, pienso, me pregunto”



- **Veo.** Describí lo que observás al mirar y anótalo en la columna **Veo** del cuadro que encontrarás a continuación.
- **Pienso.** Anotá en la columna **Pienso** todo lo que pensaste al observar lo que viste.
- **Me pregunto.** En la columna **Me pregunto** escribí todos los interrogantes que te vengan a la cabeza luego de observar las obras y pensar.

Veo ↓ 	Pienso ↓ 	Me pregunto ↓ 

Propónganles compartir lo que anotaron. Pongan en debate las diferentes cuestiones que van surgiendo, retomen sus preguntas y relaciónenlas con lo que queremos introducir esta semana: los cuadriláteros. Si no surge la idea de que en todas las obras se utilizan objetos parecidos y que todos ellos tienen cuatro lados, pueden hacer preguntas que inviten a sus alumnos a observar esas cuestiones.

Retomando la frase de Henri Poincaré que dice que “la matemática es el arte de llamar de la misma manera a cosas distintas”, pregúntenles a sus estudiantes cómo llamarían al “único” objeto presente en estas cuatro obras de arte. Valoren sus aportes y comenten que el nombre con el cual se conocen este objeto es “cuadrilátero”.

Si no surgió anteriormente, pueden preguntar si estas obras se relacionan con otras que hayan visto o creado a lo largo del proyecto, para volver sobre el hecho de las limitaciones para crear y como, aún con ellas, se pueden hacer grandes piezas de arte.

Momento II. Trabajo en equipos

Los estudiantes trabajarán en los grupos establecidos en la dinámica en la que recorrieron el aula. Presenten las consignas de la actividad “¡A clasificar los cuadriláteros!”. Comenten que podrán usar papel y lápiz o bien las *netbooks* con Geogebra.

¡A clasificar los cuadriláteros!



Ya hemos desarrollado un ojo a prueba de todo, registrando figuras geométricas tanto en el arte como en la matemática. La observación atenta es una de las grandes habilidades para poder avanzar en creaciones geométricas.

Así como hemos podido clasificar los triángulos por la medida de sus lados o de sus ángulos, ahora nuestra misión es clasificar los cuadriláteros.

- ¿Qué tipo de cuadriláteros puede haber?
- ¿Se animan a dibujar varios diferentes?
- ¿Tienen alguna característica en común?
- ¿Cómo los agruparían teniendo en cuenta las distintas características?
- ¿Qué nombres les podrían?
- ¿Existen cuadriláteros más allá de los más conocidos, cuadrados y rectángulos?
- ¿Qué características tienen?

He aquí nuestra prueba de fuego, querida comunidad científica: encontrar una “buena” clasificación para estos objetos de cuatro lados. No se olviden que luego compartiremos los avances con los equipos de todo el mundo en nuestro Congreso Anual de Matemáticos.

¡Éxito con la tarea!

Momento III. Puesta en común e institucionalización

Propónganles a sus estudiantes compartir las respuestas a las preguntas planteadas anteriormente y los avances en la clasificación de cuadriláteros. Es importante escuchar y valorar los resultados parciales que vayan obteniendo los distintos equipos, aunque algo de lo que hayan pensado no pertenezca a las clasificaciones conocidas, lo único importante en este punto es que puedan argumentar sus decisiones y que al ejemplificar sean coherentes con la clasificación propuesta.

Una vez que todos los equipos hayan podido hacer sus aportes, retomen aquellas clasificaciones que sean más parecidas a las usuales para avanzar y definir cuadrado, rectángulo, paralelogramo, trapecio y rombo. En este punto, para chequear la comprensión, es conveniente empezar a preguntar, por ejemplo, si un rectángulo puede ser cuadrado o si un paralelogramo es también trapecio, entre otras opciones.

Momento IV. Actividad de metacognición

Den a sus alumnos cinco minutos al finalizar la actividad para que puedan pensar las preguntas “¿Qué aprendí hoy?” y “¿Cómo lo aprendí?” y registrar las respuestas en sus cuadernos. Podrían salir cuestiones relacionadas a la acción de clasificar propiamente dicha o también a las definiciones de los diferentes cuadriláteros y cómo uno puede chequear si un objeto cumple o no cierta definición.

Pueden invitar a quienes lo deseen a compartir lo que escribieron.

Actividad 10. Cuatro cuadriláteros

Esta actividad se desarrolla en un tiempo estimado de dos o tres módulos de 40 minutos. Pueden trabajar en los grupos que formaron con la dinámica de recorrer el aula o en los equipos que crean conveniente.

Momento I. Trabajo en equipos

Se trabajará con las consignas de la actividad “¡A investigar los cuadriláteros!”. Den tiempo a los estudiantes para que puedan explorar el cuadrilátero que elijan en equipo, conjeturar y validar sus afirmaciones.

Comenten que podrán hacer uso de todos los materiales que tengan, ya sea papel y lápiz, como también las *netbooks* con Geogebra u otro *software* que crean conveniente.

¡A investigar los cuadriláteros!



Así como ya hemos descubierto y creado nuestras propias publicaciones sobre propiedades escondidas en los ángulos y en los triángulos, nuestra nueva misión es observar atentamente los cuadriláteros para ver qué se esconde en ellos. Como tenemos a la más selecta comunidad trabajando en esto, solo tendrán que elegir un cuadrilátero –rectángulo, paralelogramo, trapecio o rombo– e investigarlo a fondo.

- ¿Qué cuadrilátero van a elegir? ¿Qué esconde?
- ¿Qué pueden decir de sus lados? ¿Y de sus ángulos? ¿Y de sus diagonales?

Para comenzar, no se olviden de chequear la definición, ya que nuestros sentidos nos pueden engañar.

¡Adelante, matemáticos!

Momento II. Puesta en común e institucionalización

Plantéenles a sus estudiantes que compartan las investigaciones que han desarrollado en equipos, poniendo en diálogo los avances de todos y evidenciando cómo lo que un grupo ha logrado descubrir puede ayudar a otro para hacer sus propias creaciones.

Además de los resultados propiamente dichos, para los cuales también se puede haber utilizado el programa Geogebra para hacer una exploración, intenten indagar sobre los argumentos que los han llevado a las conclusiones. Recuerden que no alcanza solo con medir, ya que esta medición no es precisa (pueden recuperar algunos de los problemas previos donde esto se evidenció; por ejemplo, la construcción de un triángulo con lados de 3 cm, 5 cm y 8 cm) y, además, porque no alcanza con probar un par de ejemplos (tal como ocurría con los patrones y los trucos de magia) para hacer una afirmación general.

Registren en el pizarrón o en un afiche una lista (preferentemente corta) de propiedades que hayan podido descubrir e indaguen cómo nos permite también sacar conclusiones de figuras; por ejemplo, las propiedades que tiene un cuadrado.

Momento III. Actividad de metacognición

Den a sus alumnos cinco minutos al finalizar la actividad para que puedan pensar las preguntas “¿Qué aprendí hoy?” y “¿Cómo lo aprendí?” y registrarlo en sus cuadernos.

La idea es que puedan anotar alguna de las propiedades que aprendieron, como así también parte del proceso de descubrimiento y validación que han realizado. Por ejemplo, que no alcanza con que a la vista dos figuras resulten iguales, porque los sentidos nos pueden engañar.

Semana 6 /

¿Cómo sacar al artista que tenemos dentro?



SE ESPERA QUE LOS ESTUDIANTES:

- Reinviertan los conocimientos geométricos para resolver problemas.
- Creen sus propias obras de arte matemático.
- Expliciten en la obra que elijan la relación entre arte y matemática.

Actividad 11. Preparamos la “Muestra de arte y matemática”

Momento I. Preparación de la “muestra”

Cuéntenles a sus alumnos que durante toda la semana prepararán la “Muestra de arte y matemática” y, para eso, tienen que participar individualmente, en parejas o en grupos, en dos de estas actividades. Deberán elegir al menos una de las tres primeras opciones que se describen a continuación. Los que quieran intervenir en tres actividades podrán hacerlo.

De acuerdo a la cantidad de alumnos encargados de armar la muestra, se podrán proponer más o menos opciones y se dispondrá que participen en dos o más de ellas.

A continuación, compartimos algunas actividades propuestas:

1. *Presentaciones de arte y matemática en escenario.* Crearán una obra de arte matemático o de matemática artística para exhibirla en el escenario y comentarles a los visitantes en vivo y desde el escenario la matemática que contiene la obra.
2. *Presentaciones de arte y matemática en stands.* Crearán una obra de arte matemático o de matemática artística para exhibirla en el stand y comentarles a los visitantes la matemática que contiene.

3. *Stand*s para aprender a descubrir la matemática que esconde el arte. Seleccionarán algunas obras conocidas que tengan algún fundamento matemático para compartirlo con los visitantes.
4. *Afiches con demostraciones visuales de teoremas matemáticos*. Al estilo de las que hemos visto del Teorema de Pitágoras, deberán crear afiches y una breve explicación de por qué esa aparente obra artística es matemática.
5. *Invitaciones*. Escribirán un texto corto y convocante para invitar a amigos y familiares a la “Muestra de arte y matemática”. Deberán poner en juego todo lo aprendido a lo largo del proyecto, pueden citar frases de famosos o inventar las propias.
6. *Videos*. Crearán un video corto y convocante para invitar vía redes sociales a amigos y familiares a la “Muestra de arte y matemática”. Deberán poner en juego todo lo aprendido a lo largo del proyecto; pueden citar frases de famosos o inventar las propias, como así también utilizar algunas de las actividades que les hayan resultado llamativas. También podrán crear videos para pasar en la muestra.
7. *Presentadores*. Escribirán un guion para presentar la muestra y a cada artista que se suba al escenario, como así también a los videos u otras piezas que se quieran presentar.
8. *Cronograma*. Organizarán el cronograma de la muestra indicando qué actividades se ofrecerán y en qué horario.
9. *Espacio*. Organizarán los lugares para el escenario, los stands y las paredes donde se colgarán los afiches.

Algunas dinámicas que se pueden usar esta semana:

- *Para practicar las explicaciones matemáticas de las obras*. Se organizan en las parejas o equipos que presentan la obra y su explicación matemática y el otro equipo integrará el público, para brindarles un *feedback* que permita mejorar la *performance*. Este *feedback* consistirá en una valoración positiva de lo que realizaron y una sugerencia concreta para poder mejorarlo. Luego, invierten los roles.
- *Para preparar la interacción con el público*. Es importante que puedan anticiparse a algunas de las preguntas que harán los visitantes y, así, tener pensadas las respuestas. Para esto, propónganles a sus estudiantes agruparse en pequeños equipos para simular estas preguntas. Pueden estar relacionadas con el planteo de por qué esto es matemática o por qué es creativa una obra matemática.
- *Para revisar contenido*. Una vez que un grupo muestre su trabajo (video, afiche, invitación), otro lo revisará.

- *Para trabajar en equipo.* Definan los roles de cada integrante y detallen qué responsabilidades tiene cada uno.

Momento II. Momento de reflexión post-muestra

Cada estudiante o grupo dedicará un tiempo a pensar en torno a qué aprendieron en la muestra. Algunas preguntas que podrán guiar este momento son:

- ¿Pudiste mejorar tu presentación o tus respuestas de acuerdo al *feedback* de alguno de los visitantes?
- ¿Aprendiste algo de las presentaciones de tus compañeros? ¿Qué y por qué? ¿Te ayudó esto a mejorar tu propia presentación?
- ¿Hubo alguna pregunta o intervención del público que te ayudara a pensar un poco más sobre la relación de tu obra con la matemática?
- ¿Te hicieron alguna pregunta que no esperabas? ¿Cómo hiciste para responderla? ¿Se te ocurre ahora alguna mejora para esa respuesta?
- ¿Te parece que pudiste “convencer” al público de la relación entre arte y matemática? ¿Qué ideas se te ocurren para fortalecer este punto?

Momento III. Autoevaluación

Cada estudiante o grupo hará la autoevaluación de su producto final, utilizando la rúbrica que se comparte posteriormente. En este momento, ellos debatirán en el interior del equipo o reflexionarán individualmente para poder sintetizar en qué etapa se encuentran de cada uno de los ítems considerados en la rúbrica. También, como parte de la autoevaluación, podrán pensar qué recomendaciones se darían para poder avanzar en los puntos que tienen más débiles, de acuerdo a la rúbrica.

Momento IV. Evaluación consensuada

El docente se reunirá con cada grupo para conocer su autoevaluación en relación a la confección del producto final. En un primer momento escuchará a los estudiantes. Es recomendable que tenga sus propias anotaciones y sugerencias para avanzar en el recorrido y poder repreguntar, principalmente en los casos donde las evaluaciones no coincidan.

La idea es dialogar y llegar a una evaluación consensuada entre estudiantes y docente y, a la vez, establecer estrategias futuras para profundizar el aprendizaje.

Les compartimos, al final del proyecto, la rúbrica para la evaluación del producto final. Como se anticipó, es recomendable darla a conocer al principio para que los estudiantes sepan cómo serán evaluados.

Momento V. Rutina de pensamiento de cierre

Propónganles a sus estudiantes realizar la rutina de pensamiento “Puente 3-2-1” en relación al tópico de este proyecto, es decir “arte y matemática”. En este momento completarán la parte del “después” e intentarán construir el puente completo.

Realizamos la rutina de pensamiento “Puente 3-2-1”



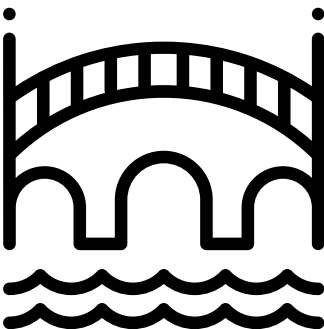
1. **Escribí 3 palabras** que vengan a tu mente sobre el tema “arte y matemática”.
2. A continuación, **redactá 2 preguntas** que se te ocurran en relación a ese tema.
3. Finalmente, **escribí 1 metáfora o 1 analogía** relacionada con el mismo tema.

Construyendo el puente...

En parejas, compartan sus respuestas del inicio y del final. Discutan sobre cómo su pensamiento se modificó en relación a la experiencia con este proyecto. Intenten identificar cuáles fueron los nuevos pensamientos o los cambios que se dieron. Recuerden que las ideas iniciales no son ni buenas ni malas, sino puntos de partida.

Construyendo un puente entre todos...

Compartan sus puentes con el resto de sus compañeros. ¿Cómo sería el puente que los represente a todos?

Respuestas 3 ideas		Respuestas 3 ideas
2 preguntas		2 preguntas
1 metáfora o 1 analogía		1 metáfora o 1 analogía

Rúbrica final

La siguiente rúbrica servirá para evaluar los aprendizajes de los chicos. Deben presentarla al comenzar el proyecto para que los estudiantes sepan de antemano cómo se los evaluará y a la vez les sirva para armar y chequear sus propios trabajos antes de entregarlos. En esta oportunidad, la valoración será con una escala de cuatro rangos: En camino, Logrado, Avanzado y Experto.

	En camino	Logrado	Avanzado	Experto
Preparación de la muestra	Presenté dificultades para utilizar el tiempo de la clase para avanzar en la preparación de la muestra.	Utilicé el tiempo en clase para avanzar en la preparación de la muestra.	Utilicé el tiempo en clase para avanzar en la preparación de la muestra. Participé en múltiples tareas.	Utilicé el tiempo en clase para avanzar en la preparación de la muestra. Participé en múltiples tareas y ayudé a mis compañeros dando un <i>feedback</i> amable y preciso.
Obra creada - Originalidad	Mi obra está incompleta.	Mi obra está completa.	Mi obra está completa. Presenta una síntesis de varias ideas abordadas en el proyecto.	Mi obra se terminó completamente. Presenta ideas nuevas que no fueron abordadas en el proyecto.
Obra creada - Elementos geométricos	Mi obra no posee elementos geométricos.	Mi obra posee elementos geométricos. La relación de la obra con la matemática no es clara.	Mi obra presenta elementos geométricos. La relación de la obra con la matemática es clara.	Mi obra presenta elementos geométricos y estos han sido usados poniendo de manifiesto conocimiento matemático.
Presentación oral de la obra	Me expresé de forma desordenada y fragmentada.	Me expresé de forma clara y ordenada.	Me expresé de forma clara, ordenada y coherente.	Me expresé de forma clara, ordenada y coherente. Utilicé un vocabulario preciso y variado.
Explicación de la relación de la obra con la matemática	Tengo dificultades u omití expresar la relación de la obra con la matemática.	Presenté una breve reflexión de cómo se relaciona la obra con la matemática.	Presenté una breve, clara y concreta reflexión de cómo se relaciona la obra con la matemática.	Presenté una breve, clara y concreta reflexión de cómo se relaciona la obra con la matemática. Esta implica una producción personal que sintetiza varias de las ideas abordadas en este proyecto.

Bibliografía

- Dirección General de Cultura y Educación (2003). Documento N°3, *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la geometría en EGB, prov. de Bs As*. Disponible en <http://servicios2.abc.gov.ar/docentes/capacitaciondocente/plan98/pdf/geometria.pdf>. Fecha de consulta: 03/03/19
- Ivorra Castillo, Carlos. *Geometría 2*. Disponible en <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Geometria2.pdf> Fecha de consulta: 03/03/19
- Ministerio de Educación de la Provincia de Tucumán (2015). *Diseño curricular para la educación secundaria*.
- Ministerio de Educación e Innovación de la Ciudad de Buenos Aires. Dirección general de planeamiento. Dirección de Currícula (2007). *Aportes para la enseñanza Nivel Medio Matemática. Geometría*. G.C.B.A. Disponible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/geometria_media.pdf Fecha de consulta: 03/03/19
- Ritchart, R. et al (2014). *Hacer visible el pensamiento*. Buenos Aires: Paidós.
- Visible Thinking. Disponible en: <http://www.visiblethinkingpz.org/>

Notas



SEGUNDO AÑO
MATEMÁTICA / PROYECTO 02

¿Cómo sacar a los artistas que tenemos dentro?

PLaNEA
NUEVA ESCUELA
PARA ADOLESCENTES